Pavel Obdržálek, MAII, úkol č. 7

$$\text{Určete délku grafu funkce } f(x) = e^x \text{ pro } x \in [0, a], \text{ kde } a > 0. \tag{1}$$

Nejprve si přepíšeme danou úlohu jako integrál

$$\int_0^a \sqrt{1 + e^{2x}} dx$$

Provedeme substituci $u^2 = 1 + e^{2x}$ ($dx = \frac{du}{u^2-1}$):

$$\int_2^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{\sqrt{u^2}}{u^2 - 1} du = \int_2^{\sqrt{1+e^{2a}}} \frac{u}{u^2 - 1} du$$

Provedeme substituci $v = u^2 - 1$ ($du = \frac{dv}{2u}$):

$$\int_3^{e^{2a}} \frac{1}{2v} dv$$

Zintegrujeme:

$$\left[\frac{\log |v|}{2} \right]_3^{e^{2a}} = \frac{\log |e^{2a}| - \log |3|}{2}$$

$$\text{Spočtěte } \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{3 \sin x + 2 \cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx. \tag{2}$$

Nejprve si integrál rozdělíme na součet integrálů

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos x}{2 \sin x + 3 \cos x} dx$$

Zlomky usměrníme

$$3 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 + 3 \cot x} dx + 2 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2 \tan x + 3} dx$$

Provedeme substituci $u = 2 + 3 \cot x$ ($du = \frac{-3}{\sin^2 x} dx = -3(1 + \cot^2 x) dx = -\frac{u^2-4u+4}{3} dx$) resp.
$v = 2 \tan x + 3$ ($dv = 2(\tan^2 x + 1) dx = \frac{v^2-6v+13}{2} dx$)

$$9 \int_5^{\infty} \frac{u}{(u-2)^2} du + 4 \int_3^5 \frac{v}{(v-3)^2} dv$$

Převedeme na parciální zlomky

$$9 \int_5^{\infty} \frac{1}{u-2} + \frac{2}{(u-2)^2} du + 4 \int_3^5 \frac{1}{v-3} + \frac{3}{(v-3)^2} dv$$

Rozdělíme na součet integrálů

$$9 \int_5^{\infty} \frac{1}{u-2} du + 18 \int_5^{\infty} \frac{1}{(u-2)^2} du + 4 \int_3^5 \frac{1}{v-3} dv + 12 \int_3^5 \frac{1}{(v-3)^2} dv$$

Zintegrujeme

$$9\left[\log|u-2|\right]_5^\infty - 18\left[\frac{1}{u-2}\right]_5^\infty + 4\left[\log|v-3|\right]_3^5 - 12\left[\frac{1}{v-3}\right]_3^5 =$$

$$= \infty - 9\log(3) - 0 + 6 + 4\log 2 + \infty - 6 + \infty$$

Integrálním kritériem vyšetřete konvergenci řady $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right).$ (3)

Protože víme, že funkce je na celém $[1,\infty)$ monotónně klesající, pak převedeme na správný integrál

$$\int_1^\infty \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)dx$$

Provedeme integraci per partes ($u = \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$, $u' = -\frac{1}{2x^{\frac{3}{2}}\sqrt{\frac{x-1}{x}}}$, $v' = 1$, $v = x$)

$$\left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^\infty + \int_1^\infty \frac{1}{2\sqrt{x-1}} = \left[\arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)\right]_1^\infty + \left[\sqrt{x-1}\right]_1^\infty =$$

$$= \arcsin 0 - \arcsin 1 + \infty - 0$$

Odtud vidíme, že integrál nekonverguje, tedy ani řada.